

QUADRATISCHE FORMEN ÜBER
FUNKTIONENKÖRPERN

D i s s e r t a t i o n
z u r E r l a n g u n g d e s D o k t o r g r a d e s

bei den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Johannes Gutenberg-Universität
zu Mainz

(Fachbereich Mathematik)

Mahmoud Amer

M a i n z 1 9 7 6



Dekan:

Prof. Dr. H. Rüßmann

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. A. Pfister

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. M. Knebusch

Tag der mündlichen Prüfung:

14.12.1976

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
I Sätze und Beweise zum Lokal-Global-Prinzip	4
II Die Eigenschaften C_i und C_i^q	22
III Ganzheitsringe in Funktionenkörpern	33
IV Die u-Invariante	41
Literaturverzeichnis	51



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554413_0049

E i n l e i t u n g

Eine wichtige Invariante bei der Untersuchung der quadratischen Formen über einem Körper K ist die Invariante $u = u(K)$, die maximale Dimension einer anisotropen Form über K . Kaplansky [6] vermutete, daß u , falls endlich, immer eine Zweierpotenz sein muß, und zeigte, daß es Körper gibt, wo u eine beliebig vorgegebene Zweierpotenz ist. In der umgekehrten Richtung weiß man nur, daß u die Werte 3,5,7 nicht annehmen kann (siehe Lorenz [10]).

Ist K ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $n > 1$ über einem reell abgeschlossenen Grundkörper k , so gilt (siehe Lorenz [10])

$$u(K) \leq \frac{1}{2} (4^n - 2^n)$$

Für den Fall $n = 2$ gilt also $u(K) \leq 6$ und nach einer Vermutung von Lang [9] sollte sogar gelten $u(K) \leq 4$. Durch Untersuchung solcher Körper hoffte ich eine weitere Information über u zu gewinnen, nämlich die Vermutung von Lang zu bestätigen oder eben einen solchen Körper konstruieren zu können, wo $u = 6$ gilt.

In Kapitel I beschäftige ich mich mit dem Lokal-Global-Prinzip (Hasse-Prinzip). $\mathcal{A}$ bezeichne eine Primstelle über K , $K_{\mathcal{A}}$ bzw. $\bar{K}_{\mathcal{A}}$ die Komplettierung bzw. den Restklassenkörper von K an der Stelle $\mathcal{A}$. Man sagt: In K gilt das Hasse-Prinzip, falls eine Form φ über K genau dann in K isotrop ist, wenn φ überall lokal, d.h. in allen $K_{\mathcal{A}}$, isotrop ist.

Ist $K = k(t)$ ein rationaler Funktionenkörper über dem Grundkörper k , so hat man die exakte Sequenz von Harder-Scharlau [20] (siehe auch [17])

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(K) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{A}}^2} \bigoplus_{2\mathcal{A}} W(K_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\oplus S_{\mathcal{A}}^*} W(k) \longrightarrow 0$$

mit $W(K)$ die Wittgruppe von K , $\varphi_{\mathcal{A}}^2$ die 2. Restklassenform einer Form φ über K , $S_{\mathcal{A}}^*$ die Transferabbildung von Scharlau.

Aus dieser Sequenz ergeben sich einige Folgerungen. Eine davon ist, daß das Hasse-Prinzip für Formen der Dimension ≤ 3 über $k(t)$ gilt. In I § 4 gebe ich einen direkten (elementaren) Beweis dafür. In I § 5 zeige ich, daß das Hasse-Prinzip in $\mathbb{R}(t)$ gilt und gebe in I § 6 einige Beispiele von Körpern, wo das Hasse-Prinzip für Formen der Dimension 4 nicht mehr gilt.

Ist nun k ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$, so gilt (siehe Pfister [15]): $u(k), u(\bar{k}_\mathcal{V}) \leq 2$ für alle $\mathcal{V}$ und somit gilt für eine beliebige Form φ über K : $\dim \text{Ker } \varphi^2 \leq 2$. Wie in IV § 3 gezeigt wird, wäre man mit Hilfe der Sequenz von Harder-Scharlau, in der Lage zu beweisen, daß $u(K) \leq 4$, wenn man für jede Form φ über K eine 2-dimensionale Form $\mathcal{V}$ über K finden könnte mit $\mathcal{V}_\varphi^2 = \varphi^2$ für alle $\mathcal{V}$. Dies ist aber unmöglich, da es über K 3-dimensionale Formen gibt, wie ich in I § 7 zeige, die kein Element aus k darstellen.

Ein Körper K heißt nach Lang [8] ein C_i Körper, wenn jede Form vom Grad d in n Variablen mit $n > d^i$ eine nicht triviale Nullstelle in K besitzt. In einem C_i Körper hat jedes System von r Formen vom Grad d in $> rd^i$ Variablen eine simultane nicht triviale Nullstelle. Wir definieren analog: K ist C_i^q , wenn jedes System von r quadratischen Formen über K in $> r \cdot 2^i$ Variablen eine simultane nicht triviale Nullstelle in K besitzt.

Kapitel II beschäftigt sich mit den Eigenschaften C_i, C_i^q . So wird analog zu Lang gezeigt: Ist k ein C_i^q Körper, so ist $K = k(t)$ ein C_{i+1}^q Körper.

Auf der anderen Seite zeige ich in II § 3 folgendes Ergebnis:

Satz 7: Die Form $\varphi = \sum_{i,j} (a_{ij} + tb_{ij}) x_i x_j$ über $K = k(t)$

mit $a_{ij}, b_{ij} \in k$

ist in K isotrop genau dann, wenn die Formen

$\varphi_0 = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, $\varphi_1 = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$ eine simultane Nullstelle in k besitzen.

In Kapitel IV werden dann die Zusammenhänge der in I und II dargestellten Ergebnisse mit der Vermutung von Lang und einer möglichen Information über u aufgezeigt.

Ist k wiederum ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$, so gilt nach II Satz 7:

$u(K) = u(k(t)) = 6$, wenn es über k ein System von 2 quadratischen Formen in > 4 Variablen gibt, das keine simultane Nullstelle in k besitzt.

Ein interessantes Beispiel für ein solches System über $\mathbb{Q}$ steht in der Arbeit von Birch und Swinnerton-Dyer [2], nämlich:

$$\begin{aligned} \text{Das System} \quad u v &= x^2 - 5 y^2 \\ (u+v)(u+2v) &= x^2 - 5 z^2 \end{aligned}$$

in den 5 Variablen u, v, x, y, z hat in $\mathbb{Q}$ keine simultane Lösung.

Die grundlegende Tatsache, daß der Ring der ganzen Zahlen im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ein EPZ-Ring ist, spielt hier in diesem Beispiel eine wesentliche Rolle. Um ein ähnliches Beispiel über k zu konstruieren, war es also erforderlich, die Ringe der ganzen Zahlen in den quadratischen Erweiterungen $k(\sqrt{p})$ mit p prim auf ihre Eigenschaft als EPZ-Ringe zu untersuchen, womit ich mich in Kapitel III befasse.

Für Anregungen und Unterstützung während der ganzen Arbeit möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. A. Pfister herzlich danken.

I. SÄTZE UND BEISPIELE ZUM LOKAL-GLOBAL-PRINZIP

§ 1 Der Satz von Milnor

Sei K ein Körper mit einer diskreten Bewertung v , Primelement π und Restklassenkörper $\bar{K}$. Wir setzen außerdem voraus, daß K bezüglich v vollständig ist und $\text{char } \bar{K} \neq 2$

Jede quadratische Form φ über K kann geschrieben werden in der Form

$$\varphi = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \oplus \pi \langle u_{r+1}, \dots, u_n \rangle$$

mit Einheiten u_i

Die Formen $\varphi^1 = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r \rangle$, $\varphi^2 = \langle \bar{u}_{r+1}, \dots, \bar{u}_n \rangle$ heißen dann die 1. und 2. Restklassenform von φ . Während φ^1 kanonisch ist, hängt φ^2 von der Wahl von π ab.

Satz 1 (Springer):

φ ist in K genau dann isotrop, wenn φ^1 oder φ^2 in $\bar{K}$ isotrop ist.

Folgerung:

$$W(K) = W(\bar{K}) \oplus W(\bar{K})$$

Für den Beweis siehe T.A. Springer [19]

Man hat dann die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow W(\bar{K}) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\varphi^2} W(\bar{K}) \rightarrow 0$$

wobei $\langle \bar{u} \rangle$ in $\langle u \rangle$ übergeht unter dem ersten Homomorphismus.

Wir betrachten nun einen rationalen Funktionenkörper $K = k(t)$ über einem beliebigen Grundkörper k mit $\text{Char } k \neq 2$. Die "endlichen" Primstellen $\mathfrak{p}$ von K entsprechen umkehrbar eindeutig den normierten irreduziblen Polynomen $p(t)$. Mit $K_{\mathfrak{p}}$ wird die Kompletterung von K an der Stelle $\mathfrak{p}$ bezeichnet und mit $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ der Restklassenkörper von $K_{\mathfrak{p}}$. Als Primelement an der Stelle $\mathfrak{p}$ wählen wir $p(t)$, das zugehörige normierte irreduzible Polynom, falls $\mathfrak{p}$ endlich ist bzw. $\frac{1}{t}$ falls $\mathfrak{p} = \infty$

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{K}_y &= k[t]/p(t) & \text{für } y \neq \infty \\ \bar{K}_y &= k & \text{für } y = \infty \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender

Satz 2 (Milnor):

$$\text{Die Sequenz } 0 \rightarrow W(k) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\varphi_y^2} \bigoplus_{y \neq \infty} W(\bar{K}_y) \rightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis: Wir definieren $L_d \subset W(K)$ als den von den Formen $\langle f \rangle$ erzeugten Unterring, wobei $f \in k[t]$ mit $\text{Grad } f \leq d \in \mathbb{N}_0$

Wir haben dann $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \dots$ mit $\bigcup L_d = W(K)$, außerdem ist L_0 isomorph zu $W(k)$ unter dem natürlichen Homomorphismus $W(k) \rightarrow W(K)$.

Die additive Gruppe L_d wird von den Formen $\langle f_1 \dots f_s \rangle$ erzeugt, wobei f_i Polynome vom Grad $\leq d$ sind. Für $d \geq 1$ beweisen wir zunächst

Lemma: Die additive Gruppe L_d wird modulo L_{d-1} von den Formen $\langle pg_1 \dots g_s \rangle$ erzeugt, wobei p ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad d ist und g_i vom Grad $< d$ sind.

Ist f das Polynom vom Grad $< d$ mit $f \equiv g_1 \dots g_s \pmod{(p)}$, so gilt außerdem $\langle pg_1 \dots g_s \rangle \equiv \langle pf \rangle \pmod{L_{d-1}}$

Beweis: Im Witttring eines beliebigen Körpers gilt die Identität

$$\langle a + b \rangle = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \ominus \langle ab(a+b) \rangle \quad (1)$$

Betrachte nun eine erzeugende $\langle f_1 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle$ von L_d mit paarweise verschiedenen normierten f_i vom Grad d und mit $\text{Grad } g_i < d$. Ist $r \geq 2$, so schreibe

$$f_1 = f_2 + h \text{ mit } \text{Grad } h < d$$

Aus (1) folgt $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle \oplus \langle h \rangle \ominus \langle f_1 f_2 h \rangle$

Multipliziert man mit $\langle f_2 \dots f_1 g_1 \dots g_s \rangle$, so folgt

$$\begin{aligned} \langle f_1 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle &= \langle f_3 \dots g_s \rangle \oplus \langle hf_2 \dots g_s \rangle \\ &\quad \ominus \langle f_1 hf_3 \dots g_s \rangle \end{aligned}$$

Da jeder Summand auf der rechten Seite höchstens $r-1$ Faktoren vom Grad d hat, folgt durch Induktion nach r die erste Behauptung

Betrachte nun die erzeugende $\langle p g_1 \dots g_s \rangle$ mit normiertem irreduziblem p und setze

$$g_1 g_2 \equiv h \pmod{p} \quad \text{mit Grad } h < d$$

Wir haben dann

$$g_1 g_2 = h + p l \quad \text{mit Grad } l < d$$

Aus (1) folgt $\langle g_1 g_2 \rangle = \langle h \rangle \oplus \langle pl \rangle \ominus \langle plh g_1 g_2 \rangle$

Multipliziert man mit $\langle pg_3 \dots g_s \rangle$, so folgt

$$\begin{aligned} \langle p g_1 \dots g_s \rangle &= \langle ph g_3 \dots g_s \rangle \oplus \langle lg_3 \dots g_s \rangle \\ &\quad \ominus \langle lh g_1 \dots g_s \rangle \\ &\equiv \langle ph g_3 \dots g_s \rangle \pmod{L_{d-1}} \end{aligned}$$

Wieder durch Induktion nach s folgt dann die zweite Behauptung.

Um den Beweis zu Ende zu führen benötigt man noch folgenden Satz von Witt:

Für einen beliebigen Körper k hat die additive Gruppe $W(k)$ eine Darstellung durch Erzeugende $\langle a \rangle$, $a \in k^x$ mit den Relationen

$$\begin{aligned} \langle ab^2 \rangle &= \langle a \rangle \\ \langle a+b \rangle &= \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \ominus \langle ab(a+b) \rangle \\ \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von dem bewiesenen Lemma und diesem Satz von Witt zeigt man leicht, daß $\langle \bar{f} \rangle \rightarrow \langle pf \rangle \pmod{L_{d-1}}$ einen Homorphismus von $W(\bar{K})$ in L_d/L_{d-1} erzeugt, wobei das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad d ist, das die Restklasse $\bar{f} \pmod{p}$ repräsentiert.

Die Komposition

$$W(\bar{K}_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{\varphi} L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\varphi'^2} W(\bar{K}_{\mathcal{Y}'})$$

ist dann die Identität oder Null jenachdem ob $p = p'$ oder $p \neq p'$

Aus dem Lemma folgt nun $L_d/L_{d-1} = \bigoplus_{\text{Grad } p = d} W(\bar{K}_{\mathcal{Y}})$

Durch Induktion nach d folgt weiter $L_d/L_0 = \bigoplus_{\text{Grad } p \leq d} W(\bar{K}_{\mathcal{Y}})$

Geht man zum direkten Limes ($d \rightarrow \infty$) über, so folgt die Behauptung.

§ 2 Der Satz von Harder-Scharlau

Sei L/K eine endliche algebraische Erweiterung,
 $S : L \rightarrow K$ eine K -lineare Abbildung, die von Null verschieden ist. Ist φ eine nicht ausgeartete quadratische Form über L , so definiert

$$S^* \varphi \text{ mit } S^* \varphi(x) = S(\varphi(x))$$

eine ebenfalls nicht ausgeartete quadratische Form über K .
 Auf diese Weise gewinnt man einen (Transfer)homomorphismus

$$S^* : W(L) \rightarrow W(K)$$

Wir definieren nun die k -lineare Abbildung

$$S_{\varphi} : \bar{k}_{\varphi} = k[t]/p(t) \rightarrow k \text{ wie folgt:}$$

$$S_{\varphi}(1) = S_{\varphi}(t) = \dots = S_{\varphi}(t^{n-2}) = 0, \quad S_{\varphi}(t^{n-1}) = 1$$

für $\varphi \neq \infty$, Grad $p(t) = n$,

$$S_{\infty} = -\text{id}.$$

Es gilt dann

Satz 3 (Scharlau): Reziprozitätsgesetz

Ist φ eine quadratische Form über K , so gilt

$$\bigoplus_{\varphi} S_{\varphi}^* \varphi^2 \sim 0$$

Beweis: Es ist zunächst klar, daß fast alle 2. Restklassenformen ~ 0 sind und daß es ausreicht, den Satz für eindimensionale Formen φ zu beweisen.

Wir schreiben O.E. $\varphi = \langle p_1(t) \dots p_n(t) \rangle$, wobei p_i normiert irreduzibel vom Grad d_i sind

Man definiere

$$A := k[t] / (p_1(t) \dots p_n(t)); \quad A_i := k[t] / (p_i(t))$$

A_i kann in A kanonisch eingebettet werden durch:

$$t \xrightarrow{r} t^r \quad p_1(t) \dots \widehat{p_i(t)} \dots p_n(t) \quad r = 0, 1, \dots, d_i - 1$$

($\widehat{}$ bedeutet: der darunter stehende Faktor wird ausgelassen.)

und man hat folglich eine kanonische Zerlegung:

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

Weiter definiere man $S : A \rightarrow k$ wie oben durch

$$S(1) = S(t) = \dots = S(t^{d-2}) = 0, \quad S(t^{d-1}) = 1,$$

$$\text{wobei } d = \sum_i d_i$$

Sei nun H die quadratische Form $S^* \langle 1 \rangle$ d.h.

$$H(f(t)) = S(f(t)^2) \quad \text{für } f(t) \in A$$

Es folgt unmittelbar aus der Definition von H und S ,

daß A_i bezüglich H paarweise orthogonal sind, da

$$A_i \cdot A_j = 0 \text{ in } A \text{ für } i \neq j$$

Man kann außerdem zeigen, daß

$$H/A_i \cong S_{\mathcal{Y}_i}^*(\varphi_{\mathcal{Y}_i}^2) \quad \text{gilt für } i = 1, \dots, n$$

Da $\varphi_{\mathcal{Y}}^2 = 0$ für alle "endlichen" Stellen außer $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n$ gilt, haben wir also gezeigt

$$H = \bigoplus_{i=1}^n S_{\mathcal{Y}_i}^*(\varphi_{\mathcal{Y}_i}^2) = \bigoplus_{\mathcal{Y} \neq \infty} S_{\mathcal{Y}}^*(\varphi_{\mathcal{Y}}^2)$$

$$\text{Es gilt } H(t^i, t^j) = S(t^{i+j}) = 0 \quad \text{für } i+j < d-1$$

$$1 \quad \text{für } i+j = d-1$$

und damit hat H eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ & & & & 2d \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & a & & & a \\ & d2 & \dots & & dd \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{ij} \in k$$

Ist $d \equiv 0 \pmod{2}$, etwa $d = 2e$, so gilt $H \sim 0$, da

$1, t, \dots, t^{e-1}$ einen e -dimensionalen totalisotropen Unterraum erzeugen. Außerdem gilt in diesem Falle

$$\varphi_{\infty}^2 = 0$$

Ist $d \equiv 1 \pmod{2}$, etwa $d = 2e+1$, so haben wir immer noch einen e -dimensionalen totalisotropen Unterraum. Rechnet man die Determinante von H , so erhält man

$$\det(H) = (-1)^{d(d-1)/2} = (-1)^{e(2e+1)} = (-1)^e$$

und damit haben wir $H \cong e \langle 1, -1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$

Außerdem gilt in diesem Falle $S_{\infty}^* (\varphi_{\infty}^2) = \langle -1 \rangle$

Daraus folgt die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Sequenz von Milnor so erweitern.

Satz 4 (Harder-Scharlau):

Die Sequenz

$$0 \rightarrow W(k) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{P}}^2} \bigoplus_{\mathcal{P}} W(\bar{K}_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\bigoplus S_{\mathcal{P}}^*} W(k) \rightarrow 0$$

ist exakt.

Der Beweis folgt unmittelbar.

§ 3 Folgerungen aus § 1 und § 2

Als weitere Folgerung ergibt sich

Satz 5: Das schwache Hasse-Prinzip

Die Form φ ist genau dann gleich Null in K , wenn φ in allen $K_{\mathcal{N}}$ gleich Null ist.

d.h. die Abbildung $W(K) \rightarrow \bigoplus_{\mathcal{N}} W(K_{\mathcal{N}})$ ist injektiv.

Beweis: Es gelte $\varphi = 0$ in allen $K_{\mathcal{N}}$

$$\Rightarrow \varphi_{\mathcal{N}}^1 = \varphi_{\mathcal{N}}^2 = 0 \text{ für alle } \mathcal{N}$$

Nach dem Satz von Milnor folgt dann $\varphi \in W(k)$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_{\mathcal{N}}^1 \text{ für alle } \mathcal{N}$$

Betrachte etwa die "unendliche Stelle"

$$\varphi = \varphi_{\infty}^1 = 0 \text{ in } K_{\infty} = k$$

Damit folgt die Behauptung

Folgerungen aus dem schwachen Hasse-Prinzip

1. Für die stark multiplikativen Formen

$$\varphi = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_n \rangle \text{ mit } a_i \in K$$

gilt nach Pfister: φ ist genau dann isotrop, wenn $\varphi = 0$ ist.

Für diese Formen gilt also das Hasse-Prinzip:

Die stark multiplikative Form φ ist genau dann isotrop in K , wenn φ in allen $K_{\mathcal{N}}$ isotrop ist.

2. Das Hasse-Prinzip gilt für die Formen der Dimension ≤ 3

Beweis: Für $\dim \varphi = 1$ ist die Behauptung trivial

Sei $\dim \varphi = 2$. Schreibe φ in der Diagonalform

$$\varphi = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \langle 1, a_1 a_2 \rangle$$

φ ist isotrop genau dann, wenn die multiplikative Form $\langle 1, a_1 a_2 \rangle$ isotrop ist. Nach 1. folgt die Behauptung

Sei zuletzt $\dim \varphi = 3$ $\varphi = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

Betrachte die Form

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \varphi \oplus \langle a_1 a_2 a_3 \rangle = a_1 \langle 1, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3 \rangle \\ &= a_1 \langle 1, a_1 a_2 \rangle \otimes \langle 1, a_1 a_3 \rangle\end{aligned}$$

Nach O'Meara [12] (42:12) ist φ genau dann isotrop,

wenn $\mathcal{N}$ isotrop ist, da $d(\mathcal{N}) = \text{Diskriminante von } \mathcal{N} = 1$

$\Rightarrow \varphi$ ist isotrop genau dann, wenn die multiplikative Form

$\langle 1, a_1 a_2 \rangle \otimes \langle 1, a_1 a_3 \rangle$ isotrop ist.

Nach 1. folgt wiederum die Behauptung.

§ 4 Das Hasse-Prinzip für Formen der
Dimension ≤ 3

In diesem Abschnitt wollen wir einen direkten Beweis der letzten Folgerung bringen

Satz 6: Sei φ eine quadratische Form über K mit $\dim \varphi \leq 3$.

Ist φ in allen $K_{\mathfrak{p}}$ isotrop, so ist φ in K isotrop.

Beweis: Für $\dim \varphi = 1$ ist die Behauptung trivial.

Sei $\dim \varphi = 2$. Sei d die Diskriminante von φ
O.E. $d \in k[t]$

Die Behauptung des Satzes besagt in diesem Falle, daß d in K ein Quadrat ist, falls d in allen $K_{\mathfrak{p}}$ ein Quadrat ist. Sei $d = \delta \prod_i p_i^{r_i}$ die Primfaktorzerlegung von d in $k[t]$ mit normierten irreduziblen Polynomen p_i und $\delta \in k$

Für p_i sei $K_{\mathfrak{p}_i}$ die zugehörige Komplettierung. Da d in $K_{\mathfrak{p}_i}$ ein Quadrat ist, so folgt $r_i \equiv 0 \pmod{2}$. Da d in K_{∞} auch ein Quadrat ist, so muß δ in k ein Quadrat sein. Also ist d in K ein Quadrat.

Sei zuletzt $\dim \varphi = 3$

Schreibe φ in der Diagonalform $\varphi = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
O.E. kann man annehmen, daß a_i ($i=1,2,3$) ganz, quadratfrei und paarweise teilerfremd sind.

Sei p ein Primteiler von a_3 und $K_{\mathfrak{p}}$ die zugehörige Komplettierung. Nach Voraussetzung stellt φ die Null in $K_{\mathfrak{p}}$ dar.

$\Rightarrow$ die Kongruenz $a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$
hat eine nichttriviale Lösung in $k[t]$

$$\Rightarrow a_2 \equiv -b^2 a_1 \pmod{p}, \quad b \in k[t]$$

$$\Rightarrow a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_3 \xi_3^2 \equiv a_1 (\xi_1 + b \xi_2) (\xi_1 - b \xi_2) \pmod{p}$$

$$\text{oder } \varphi(\xi) \equiv L^{(p)}(\xi) \cdot M^{(p)}(\xi) \pmod{p} \quad (1)$$

wobei $L^{(p)}(\xi)$, $M^{(p)}(\xi)$ lineare Formen mit ganzen Koeffizienten sind.

Analoge Kongruenzen gelten für jeden Primteiler von

$$a_1 a_2 a_3$$

Nun bestimme man lineare Formen $L(\xi)$, $M(\xi)$ mit ganzen Koeffizienten so, daß

$$L(\xi) \equiv L^{(p)}(\xi) \pmod{p},$$

$$M(\xi) \equiv M^{(p)}(\xi) \pmod{p}$$

für alle Primteiler p von $a_1 a_2 a_3$ gilt.

Aus (1) folgt dann $\varphi(\xi) \equiv L(\xi) M(\xi) \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$ (2)

Sei $n_i := \text{Gr } a_i$ $i = 1, 2, 3$; $n := \sum_{i=1}^3 n_i = \text{Gr}(a_1 a_2 a_3)$

Betrachte

$$V_i := \left\{ f \in k[t] : \text{Gr } f < \frac{1}{2}(n - n_i) = \frac{1}{2} \text{Gr}(a_1 a_2 a_3 / a_i) \right\}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$W := \{ f \in k[t] : \text{Gr } f < n = \text{Gr}(a_1 a_2 a_3) \} = k[t] / (a_1 a_2 a_3)$$

V_i , W sind lineare Räume über k und es gilt $\dim W = n$

$$\text{Setze } m_i := \dim V_i \Rightarrow m_i \geq \frac{1}{2}(n - n_i)$$

Sei $V := \bigoplus_{i=1}^3 V_i$. Die Abbildung:

$$\mathcal{L}: \underset{V}{\mathbb{V}} \longrightarrow \underset{W}{\mathbb{W}} \\ v = (v_1, v_2, v_3) \mapsto L(v) \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$$

Mit $v_i \in V_i$ ist dann eine lineare Transformation von V in W .

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $n - n_i \equiv 1 \pmod{2}$ für mindestens ein i :

Dann gilt

$$\dim V = \sum_{i=1}^3 m_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (n - n_i) = n = \dim W$$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ ist nicht injektiv

d.h. $\exists v \in V$, $v \neq 0$ mit $L(v) \equiv 0 \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$

Aus (2) folgt dann $\varphi(v) \equiv 0 \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$

Außerdem gilt $\text{Gr } \varphi(v) = \text{Gr} \left(\sum_{i=1}^3 a_i v_i^2 \right) < n$

da $v_i \in V_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \varphi(v) = 0$$

2. $n - n_i \equiv 0 \pmod{2}$ für alle $i = 1, 2, 3$:

In diesem Falle gilt $\dim V = \sum_{i=1}^3 m_i = n = \dim W$

Ist jedoch $\mathcal{L}$ nicht injektiv, so ist der Fall wie im Falle 1. erledigt.

Nehmen wir also an: $\mathcal{L}$ sei injektiv, damit auch surjektiv.

Sei α_i der Koeffizient der höchsten Potenz von t in a_i d.h.

$$a_i = \alpha_i t^{n_i} + a'_i \quad \text{mit } \text{Gr } a'_i < n_i$$

Da φ nach Voraussetzung die Null in $K_\infty = k((t^{-1}))$

darstellt, gibt es $\beta_i \in k$, $i = 1, 2, 3$ so,

daß $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq 0$ und

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i^2 = 0$$

Setze $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$= (\beta_1 t^{(n-n_1)/2}, \beta_2 t^{(n-n_2)/2}, \beta_3 t^{(n-n_3)/2})$$

Da $\mathcal{L}$ surjektiv ist, gibt es $v \in V$ mit

$$L(v) \equiv L(u) \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$$

$$\Rightarrow L(v-u) \equiv 0 \pmod{(a_1 a_2 a_3)},$$

wegen der Linearität von L . Aus (2) folgt

$$\varphi(v-u) \equiv 0 \pmod{(a_1 a_2 a_3)}$$

Es gilt außerdem $\text{Gr } \varphi(v-u) < n$, da der Koeffizient

von t^n in $\varphi(v-u)$ gleich $\sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i^2 = 0$ ist

$$\Rightarrow \varphi(v-u) = 0$$

und es ist ja $v-u = (v_1-u_1, v_2-u_2, v_3-u_3) \neq 0$

Damit ist der Fall 2. auch erledigt.

§ 5 Das Hasse-Prinzip in $\mathbb{R}(t)$

Satz 7: Ist $k = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen, so gilt in $K = \mathbb{R}(t)$ das Hasse-Prinzip.

Dieser Satz ergibt sich als Folgerung (Corollary C) eines allgemeineren in [7] bewiesenen Satzes (Theorem 11). Hier ist ein anderer Beweis:

Beweis: Durch Induktion nach $n := \dim \varphi$

1. $n \leq 3$. Die Behauptung gilt nach Satz 6
2. Sei $n > 3$, φ in allen K isotrop
Nach [10] (Satz 12.8) gilt $\varphi \cong g \langle 1, 1 \rangle \oplus \chi$
mit $g \in \mathbb{R}(t)$
O.E. kann man $g \in \mathbb{R}[t]$ und quadratfrei wählen
Setze $\mathcal{N} := g \langle 1 \rangle \oplus \chi$

Behauptung: $\mathcal{N}$ ist in allen $K_{\mathcal{N}}$ isotrop.

Beweis:

a) $\mathcal{N}$ endlich mit $p = t+a$, $a \in \mathbb{R}$:

Es gilt nach Satz 1 (Springer)

φ ist in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop genau dann, wenn $\varphi_{\mathcal{N}}^1$ oder $\varphi_{\mathcal{N}}^2$ in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop ist.

Sei etwa $\varphi_{\mathcal{N}}^1$ isotrop. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{N}}^1 &\cong \chi_{\mathcal{N}}^1 \cong \mathcal{N}_{\mathcal{N}}^1 \quad \text{für } p/g \\ \varphi_{\mathcal{N}}^1 &\cong \alpha \langle 1, 1 \rangle \oplus \chi_{\mathcal{N}}^1, \quad \mathcal{N}_{\mathcal{N}}^1 \cong \alpha \langle 1 \rangle \oplus \chi_{\mathcal{N}}^1 \quad \text{für } p \nmid g \end{aligned}$$

mit $\alpha \in K_{\mathcal{N}} \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{N}}^1$ ist in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop

$\Rightarrow \mathcal{N}$ ist in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop.

Ist $\varphi_{\mathcal{N}}^2$ statt $\varphi_{\mathcal{N}}^1$ in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop, so folgt die Behauptung auf dieselbe Weise.

b) $\mathcal{N}$ endlich mit $p = t^2 + 2bt + c$; $b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 < c$:

In diesem Falle gilt $\bar{K}_{\mathcal{N}} = \mathbb{C}$, und damit ist jede dreidim. qu. Form in $K_{\mathcal{N}}$ isotrop, also auch $\mathcal{N}$

c) $\mathcal{N} = \infty$: Der Beweis erfolgt wie in a)

Damit ist die Behauptung bewiesen und nach Induktions-
voraussetzung gilt dann : ψ ist in K isotrop $\Rightarrow$
 φ ist in K isotrop.

§ 6 Gegenbeispiele zum Hasse-Prinzip

Sei $k = \mathbb{R}(x)$, $K = k(y)$

Für quadratische Formen der Dimension 4 gilt das Hasse-Prinzip in diesem Falle nicht mehr. Beispiele dafür sind:

Beispiel 1: In [3] wurde gezeigt, daß das positiv-semidefinite Polynom von Motzkin

$$f = f(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^4y^2 + x^2y^4$$

keine Darstellung als Summe von 3 Quadraten in K hat.

Dasselbe wurde in [4] gezeigt für eine Reihe von positiv-definiten Polynomen. Beispielsweise

$$f = f(x, y) = x(x+3)^3y^2 + (1 - 250xy^2)^2$$

Sei nun f eine positiv-semidefinite Funktion in K , die keine Darstellung als Summe in 3 Quadraten in K hat. Die 4-dimensionale quadratische Form

$$\varphi := \langle 1, 1, 1, -f \rangle$$

ist dann anisotrop in K . Dagegen ist φ überall lokal isotrop, da f nach [16] eine Summe von 3 Quadraten in $K_{\mathcal{M}}$ für alle $\mathcal{M}$ ist.

Beispiel 2: Die Form $\varphi = \langle 1, x, x, -f \rangle$ mit $f = 1+x^2+y^2$ ist in allen $K_{\mathcal{M}}$ isotrop aber nicht in K

Beweis:

a) $\mathcal{M}$ "endlich" mit Primelement $p \neq f$ oder $\mathcal{M} = \infty$:
 $K_{\mathcal{M}}$ ist eine endliche algebraische Erweiterung von k , also ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$. In diesem Körper stellt die Form $\langle 1, x \rangle$ jede Summe von Quadraten dar, also auch $\tilde{f}$ [10] (Satz 12.5). Damit ist die Form $\langle 1, x, x, -\tilde{f} \rangle$ in $K_{\mathcal{M}}$ isotrop. Daraus folgt nach Satz 1, daß φ in $K_{\mathcal{M}}$ isotrop ist.

b) $p = f$: In diesem Falle ist $K_{\mathcal{M}}$ ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$. In diesem Körper ist jede dreidimensionale quadratische Form isotrop nach Pfister [15], also auch $\langle 1, x, x \rangle$,

und daraus folgt wiederum, daß φ in $K_{\mathcal{Y}}$ isotrop ist.

Nehmen wir nun an: φ sei in K isotrop.
 Setze $\varphi_1 := \langle 1, x, x \rangle$. Da φ_1 in k anisotrop ist, so muß φ_1 das Polynom $f = y^2 + (x^2+1)$ in $K = k(y)$ darstellen. Nach [13] (Satz 2) muß dann das Polynom x^2+1 eine Darstellung durch die Form $\langle x, x \rangle$ in $k = \mathbb{R}(x)$ haben. Dies würde bedeuten, daß x positiv definit ist. Widerspruch. Also ist φ in K anisotrop.

Sei nun $k = \mathbb{C}(x)$, $K = k(y)$

Auch in diesem Falle gilt das Hasse-Prinzip für quadratische Formen der Dimension 4 nicht mehr.

Beispiel 3: Die Form $\varphi = \langle 1, x, y, 1+xy \rangle$ ist in allen $K_{\mathcal{Y}}$ isotrop aber nicht in K .

Beweis: Für jede Stelle $\mathcal{Y}$ ist $\bar{K}_{\mathcal{Y}}$ ein Funktionenkörper von Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$. Also ist in $\bar{K}_{\mathcal{Y}}$ jede dreidimensionale quadratische Form isotrop. Daraus folgt, daß φ in jedem $K_{\mathcal{Y}}$ isotrop ist, da $\dim \varphi_1^1 \geq 3$ für alle $\mathcal{Y}$ gilt.

Nehmen wir nun an: φ sei in $K = k(y)$ isotrop
 Also gibt es $\xi_i \in k[y]$ mit

$$\xi_1^2 + x \xi_2^2 + y \xi_3^2 + (1+xy) \xi_4^2 = 0$$

Schreibe $\xi_i = \alpha_i y^n + \xi_i'$ mit $\text{Grad } \xi_i' < n$; $i = 1, 2, 3, 4$

und mindestens ein $\alpha_i \neq 0$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\alpha_3^2 + x \alpha_4^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$\text{und } \alpha_1^2 + x \alpha_2^2 + \alpha_4^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

da die Form $\langle 1, x \rangle$ in $k = \mathbb{C}(x)$ anisotrop ist.

Damit haben wir einen Widerspruch. Also φ ist in K anisotrop.

§ 7 Formen, die keine Konstanten darstellen

Sei $K = k(t)$. Wir nehmen an: es existieren p , $a \in k[t]$, p prim, $(a, p) = 1$, so daß die Form $\langle \bar{a} \rangle$ über $K_{\mathcal{N}}$ kein Element $\alpha \in k$ darstellt.

Beispiel:

Falls ein $\lambda \in k$ existiert, so daß $\pm \lambda$ kein Quadrat in k ist, setze

$$p := t^2 + \lambda, \quad a := t \quad \Rightarrow \quad K_{\mathcal{N}} = k(\sqrt{-\lambda}), \quad \bar{a} = \bar{t} = \sqrt{-\lambda}$$

Annahme:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda} &= \alpha(\beta + \sqrt{-\lambda} \gamma)^2 & \alpha, \beta, \gamma &\in k \\ \Rightarrow 0 &= \alpha(\beta^2 - \lambda \gamma^2), \quad 1 = 2\alpha\beta\gamma & \Rightarrow \lambda &= \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 \end{aligned}$$

Im Widerspruch dazu, daß λ kein Quadrat in k ist.

Satz 8: Gilt die obige Voraussetzung und ist außerdem $u(K_{\mathcal{N}}) = n$, so gibt es eine $(n+1)$ -dimensionale Form über K , die kein Element in k darstellt.

Beweis: Wähle $a_1, \dots, a_n \in k[t]$ mit $(a_i, p) = 1$, so daß $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$ eine Kernform über $K_{\mathcal{N}}$ ist.

Betrachte nun die $(n+1)$ -dimensionale Form

$$\begin{aligned} \varphi &:= \langle a \rangle \oplus p \langle a_1, \dots, a_n \rangle \text{ über } K \\ \varphi &\text{ ist anisotrop mit } \varphi_{\mathcal{N}}^1 = \langle \bar{a} \rangle, \varphi_{\mathcal{N}}^2 = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle \end{aligned}$$

Annahme: φ stellt $\alpha \in k$ dar.

Da φ anisotrop ist, muß $\alpha \neq 0$ sein $\Rightarrow$

$\varphi = \langle \alpha \rangle \oplus \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ wobei man b_i quadratfrei aus $k[t]$ wählen kann.

Da $\varphi_{\mathcal{N}}^2$ eine n -dimensionale Kernform über $K_{\mathcal{N}}$ ist, gilt

$$b_i = p b'_i, \quad b'_i \in k[t], \quad p \nmid b'_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$\text{d.h. } \varphi_{\mathcal{N}}^2 = \langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \rangle \Rightarrow \varphi_{\mathcal{N}}^1 = \langle \bar{\alpha} \rangle = \langle \alpha \rangle$$

$\Rightarrow \alpha$ wird von $\langle \bar{a} \rangle$ über $K_{\mathcal{N}}$ dargestellt.

Widerspruch

Folgerung: Für den Körper $k = \mathbb{R}(x, \sqrt{-f})$ mit $f = 1+x^2$

kann man leicht sehen, daß $\underline{+} x$ kein Quadrat in k ist

und daß die Form $\langle 1, 1 \rangle$ eine Kernform in $\mathbb{R}_{\varphi}$ ist, mit

$$p = t^2 + x$$

Damit stellt die dreidimensionale Form $\langle t, t^2 + x, t^2 + x \rangle$

kein Element in k dar.

II. DIE EIGENSCHAFTEN C_i UND C_i^q

§ 1 Vorbereitungen

Definition: Ein Körper K heißt C_0 , wenn jede Form über K vom Grad d in n Variablen mit $n = d$ eine nicht triviale (n.t.) Nullstelle in K hat. ($d > 1$)

K heißt C_i ($i \geq 1$), wenn jede Form über K mit $n > d^i$ eine n.t. Nullstelle in K hat.

Hier wird mit n bzw. d immer die Anzahl der Variablen bzw. der Grad einer Form bezeichnet.

Bemerkung: Die Eigenschaft C_0 ist mit der Eigenschaft algebraisch abgeschlossen äquivalent. Denn es gilt

Satz 1: Besitzt K eine Erweiterung L vom Grad n , so existiert über K eine Form vom Grad n in n Variablen, die nur die triviale Nullstelle in K hat.
Nämlich die Norm des allgemeinen Elementes $x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n$ wobei $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Basis von L/K ist.

Satz 2: Sei K ein C_i Körper, $f_1, \dots, f_r$ r Formen über K vom Grad d in n gemeinsamen Variablen. Die Formen haben dann eine simultane n.t. Nullstelle, falls $n > rd^i$ gilt.

Beweis (nach M. Nagata):

Der Beweis für $i = 0$ oder $d = 1$ ist bekannt, deshalb dürfen wir $i \geq 1$, $d \geq 2$ voraussetzen.

Sei φ_0 eine Form in $N_0 \geq r$ Variablen. Definiere induktiv:

$\varphi_1(f_1, \dots, f_r) := \varphi_0(f_1, \dots, f_r | f_1, \dots, f_r | \dots | 0, \dots, 0)$
wobei man neue Variablen nach jedem $|$ benutzt, und die Nullen an $t < r$ Stellen erscheinen. φ_1 ist also eine Form in $N_1 = n [N_0/r]$ Variablen.

$\varphi_{k+1}(f_1, \dots, f_r) := \varphi_k(f_1, \dots, f_r | f_1, \dots, f_r | \dots | 0, \dots, 0)$

eine Form in $N_{k+1} = n \lfloor N_k/r \rfloor$ Variablen

Wegen $i \geq 1, d \geq 2$ haben wir $\frac{n}{r} \geq 2$. Daraus folgt durch Induktion $N_k \geq nk$ denn:

$$1. N_1 = n \lfloor N_0/r \rfloor \geq n$$

$$2. k \rightarrow k+1 : N_{k+1} = n \lfloor N_k/r \rfloor \geq n \lfloor nk/r \rfloor \geq n \cdot 2k \geq n(k+1) \text{ für } k \geq 1$$

Also gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty$

Weiter gilt:

a) Wenn $f_1, \dots, f_r$ keine gemeinsame n.t. Nullstelle haben und wenn φ_0 keine n.t. Nullstelle hat, so haben alle $\varphi_k (f_1, \dots, f_r)$ nur die triviale Nullstelle.

b) Bezeichnet D_k den Grad von $\varphi_k(f_1, \dots, f_r)$ so,

$$\text{daß } D_{k+1} \leq d D_k,$$

$$\text{dann gilt : } \lim (N_k / D_k^i) = \infty,$$

denn mit $a = n - \frac{r}{d} > 0$ haben wir:

$$N_{k+1} / D_{k+1}^i \geq n \left(\frac{N_k}{r} - 1 \right) / (d D_k)^i =$$

$$\left(1 + \frac{a}{r d^i} \right) \left(1 - \frac{r}{N_k} \right) \frac{N_k}{D_k^i} > (1 + \delta) \frac{N_k}{D_k^i}$$

mit $\delta > 0$ und für hinreichend große k , da $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{D_k^i} = \infty$

Nach Satz 1 existiert eine Form φ in $N > 1$ Variablen, die nur die triviale Nullstelle hat, da $i \geq 1$ ist. Durch eventuelle Iteration von φ zu $\varphi(\varphi | \dots | \varphi)$ usw. gewinnt man daraus eine Form φ_0 in mindestens r Variablen, die nur die triviale Nullstelle in K hat.

Hätten nun $f_1, \dots, f_r$ keine gemeinsame n.t. Nullstelle, so ergäben a) und b) einen Widerspruch, da $N_k > D_k^i$ für hinreichend großes k

§ 2 Die Hauptsätze

Wir definieren analog zu Lang

Definition: Ein Körper K heißt C_i^q , wenn jedes System von r quadratischen Formen über K in n gemeinsamen Variablen mit $n > r 2^i$ eine simultane n.t. Nullstelle in K hat.

d.h. wenn K die Eigenschaft C_i in Bezug auf Systeme von qu. Formen hat.

Die folgenden zwei Sätze wurden in [8] für C_i Körper bewiesen.

Satz 3: Ist K ein C_i Körper, so ist jede endliche und damit auch jede algebraische Erweiterung von K ein C_i Körper.

Satz 4: Ist L ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad k über einem C_i Grundkörper K , so ist L ein C_{i+k} Körper.

Wir führen hier den Beweis für C_i^q Körper.

Algebraische Erweiterungen von C_i^q Körpern:

Satz 5: Ist K ein C_i^q Körper, so ist jede endliche und damit auch jede algebraische Erweiterung L von K ein C_i^q Körper.

Beweis: Sei $\varphi_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, r$ ein System von r qu. Formen über L in n Variablen mit $n > r 2^i$, und sei $\omega_1, \dots, \omega_s$ eine Basis von L/K . Setze

$$x_l = \sum_{m=1}^s x_{lm} \omega_m \quad l = 1, \dots, n$$

Es folgt $\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{j1}(x_{1m}) \omega_1 + \dots + \varphi_{js}(x_{1m}) \omega_s$,
 $j = 1, \dots, r$,

wobei φ_{jk} ein System von rs qu. Formen über K in den ns Variablen x_{lm} ist. Da $ns > rs 2^i$ gilt, hat das System

φ_{jk} eine simultane n.t. Nullstelle in K und damit hat das System φ_j eine simultane n.t. Nullstelle in L .

Funktionenkörper über C_i^q Grundkörper :

Satz 6: Ist L ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad k über einem C_i^q Grundkörper K, so ist L ein C_{i+k}^q Körper

Beweis: Wir beweisen den Satz für $k = 1$, der Rest folgt dann durch Induktion. Also genügt es zu zeigen, daß $K[t]$ die Eigenschaft C_{i+1}^q hat, wobei t eine Transzendent über K ist.

Sei $\varphi_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, r$ ein System von r qu. Formen über $K[t]$ in n Variablen mit $n > r \cdot 2^{i+1}$; d_j der höchste Grad der Koeffizienten von φ_j . Setze

$$x_1 = \sum_{m=0}^s \xi_{1m} t^m, \quad 1 = 1, \dots, n$$

mit Unbestimmten ξ_{1m} über K und wobei s noch zu bestimmen ist.

Es folgt dann

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{j0}(\xi_{1m}) + \varphi_{j1}(\xi_{1m}) t + \dots + \varphi_{j2s+d_j}(\xi_{1m}) t^{2s+d_j},$$

$$j = 1, \dots, r$$

wobei φ_{jk} ein System von

$$\sum_{j=1}^r (2s + d_j + 1) = (2s+1)r + \sum_{j=1}^r d_j$$

qu. Formen über K ist in den $n(s+1)$ Variablen ξ_{1m}

Mit $d := \sum_{j=1}^r d_j$ haben diese $(2s+1)r + d$ qu. Formen

dann eine simultane n.t. Nullstelle in K, wenn gilt:

$$n(s+1) > ((2s+1)r + d)2^i$$

$$\Leftrightarrow n - r2^{i+1} > ((r+d)2^i - n) / s$$

Wegen $n > r2^{i+1}$, kann man s so groß wählen, daß diese Ungleichung gilt. Damit hat dann das System φ_j eine simultane Nullstelle in $K[t]$

Korrolar: Ein Funktionenkörper K vom Transzendenzgrad k über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper ist ein C_k bzw. C_k^q Körper.

Ist der Grundkörper endlich, so ist K ein C_{k+1} bzw. C_{k+1}^q Körper, denn endliche Körper sind nach Chevalley C_1 bzw. C_1^q Körper.

§ 3 Systeme von quadratischen Formen

Sei t eine Unbestimmte über dem Körper k ;

$$\varphi = \sum_{i,j} (a_{ij} + t b_{ij}) x_i x_j = \varphi_0 + t \varphi_1$$

eine quadratische Form über $K = k(t)$ mit $a_{ij}, b_{ij} \in k$,
wobei $\varphi_0 = \sum a_{ij} x_i x_j$, $\varphi_1 = \sum b_{ij} x_i x_j$ quadratische
Formen über k sind.

Satz 7: Ist φ isotrop, so existiert ein Vektor $u \neq 0$ mit
Komponenten aus k , so daß $\varphi(u) = 0$ gilt.

Beweis: Allgemein gilt die Identität

$$\varphi(u + \lambda v) = \varphi(u - (\lambda + \frac{2\varphi(u,v)}{\varphi(v)})v) \text{ für } \varphi(v) \neq 0 \quad (1)$$

$$\text{Denn } \varphi(u - (\lambda + \frac{2\varphi(u,v)}{\varphi(v)})v)$$

$$= \varphi(u - \lambda v) - \frac{4\varphi(u,v)}{\varphi(v)} \varphi(u - \lambda v, v) + \frac{4\varphi(u,v)^2}{\varphi(v)^2} \varphi(v)$$

$$= \varphi(u - v) + 4\lambda \varphi(u, v) = \varphi(u + \lambda v)$$

Falls $\varphi(u + \lambda v) = 0$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} \varphi(u) + 2\lambda \varphi(u, v) + \lambda^2 \varphi(v) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(u)}{\varphi(v)} &= -(\lambda + \frac{2\varphi(u, v)}{\varphi(v)}) \end{aligned}$$

$$\text{und man hat } \varphi(u + \lambda v) = \varphi(u + \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(u)}{\varphi(v)} v) \quad (2)$$

Nun, da φ nach Voraussetzung isotrop ist, gibt es ein
 $u \neq 0$ mit Komponenten aus $k[t]$, so daß $\varphi(u) = 0$ gilt.

Schreibe $u = u_0 + t u_1 + \dots + t^n u_n$, wobei u_i
Vektoren mit Komponenten aus k sind, $u_0 \neq 0$

Reduktion von $\text{Grad } u := n$:

Ist $\varphi(u_0) = 0$, so folgt unmittelbar die Behauptung,
sonst schreibe

$$u = u_0 + t u' \text{ mit } u' = u_1 + t u_2 + \dots + t^{n-1} u_n$$

Es folgt $\varphi(u' + \frac{1}{t} u_0) = 0$ und nach (2)

$$\varphi(u' + t \frac{\varphi(u')}{\varphi(u_0)} u_0) = 0, \text{ da in diesem Falle}$$

$$\varphi(u_0) \neq 0$$

$$\text{Setze } u'' := u' + t \frac{\varphi(u')}{\varphi(u_0)} u_0$$

Wir zeigen 1. $u'' \neq 0$

2. Die Komponenten von u'' sind aus $k[t]$ und $\text{Grad } u'' \leq n-1$

$$\text{Zu 1.: } u'' = 0 \Rightarrow u' = -t \frac{\varphi(u')}{\varphi(u_0)} u_0 \Rightarrow u = (1-t \frac{\varphi(u')}{\varphi(u_0)}) u_0$$

Wäre $u'' = 0$, so wäre $\varphi(u_0) = 0$ Widerspruch

Zu 2. genügt es zu zeigen, daß $t \frac{\varphi(u')}{\varphi(u_0)}$ ein Polynom

vom Grad $\leq n-1$ in t ist.

$$\text{Aus } 0 = \varphi(u) = (\varphi_0 + t \varphi_1) (u_0 + t u_1 + \dots + t^n u_n)$$

folgt durch Vergleich des konstanten Gliedes auf beiden Seiten:

$$\varphi_0(u_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\varphi(u_0)} = \frac{t}{\varphi_0(u_0) + t \varphi_1(u_0)} = \frac{1}{\varphi_1(u_0)} \in k$$

Außerdem gilt:

$$\varphi(u') = \varphi\left(\frac{u-u_0}{t}\right) = \frac{1}{t^2} (-2\varphi(u, u_0) + \varphi(u_0)),$$

also ein Polynom vom Grad $\leq (n+1) - 2 = n-1$

Folgerung: Je zwei quadratische Formen über k in n gemeinsamen Variablen mit $n > u(k(t))$ haben eine nicht triviale simultane Nullstelle in k .

Anders ausgedrückt:

Existiert ein System von zwei quadratischen Formen über k in n Variablen, die keine nicht triviale simultane Nullstelle in k haben, so gilt $u(k(t)) > n$

Wir beweisen noch eine Verallgemeinerung von Satz 7

Satz 8: Hat φ einen totalisotropen Unterraum der Dimension r , so gibt es r linear unabhängige Vektoren $u_1, \dots, u_r$ mit Komponenten aus k , so daß $\varphi / \langle u_1, \dots, u_r \rangle \equiv 0$

Beweis: Durch Induktion nach r :

$r = 1$ folgt nach Satz 7

$r \rightarrow r+1$: nach Induktionsvoraussetzung gibt es r linear unabhängige Vektoren $u_1, \dots, u_r$ mit Komponenten aus k , so daß $\varphi / \langle u_1, \dots, u_r \rangle \equiv 0$

Da φ einen $(r+1)$ -dimensionalen totalisotropen Unterraum besitzt, gibt es nach dem Satz von Witt einen Vektor v mit Komponenten aus $k[t]$, so daß $u_1, \dots, u_r, v$ linear unabhängig sind und $\varphi / \langle u_1, \dots, u_r, v \rangle \equiv 0$

Schreibe $v = v_0 + t v_1 + \dots + t^n v_n$, wobei $v_0, \dots, v_n$ Vektoren mit Komponenten aus k sind, $v_0 \neq 0$

Reduktion von Grad $v = n$:

Dazu benötigen wir eine Fallunterscheidung:

a) $\varphi(v_0, u_i) = 0$ für $i = 1, \dots, r$:

In diesem Falle gilt $\varphi(v', u_i) = 0$ für $i = 1, \dots, r$
mit $v' = v_1 + t v_2 + \dots + t^{n-1} v_n$,

denn es gilt $0 = \varphi(v, u_i) = \varphi(v_0, u_i) + t \varphi(v', u_i)$
für $i=1, \dots, r$

a1) $\varphi(v_0) = 0$:

Sind $u_1, \dots, u_r, v_0$ l.unabhängig, so nehme man v_0 für u_{r+1}

Gilt dagegen $v_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$ mit $\alpha_i \in k$, so sind

$u_1, \dots, u_r, v'$ l.unabhängig, denn sonst wäre

$u_1, \dots, u_r, v$ l.abhängig. Außerdem gilt:

$$\varphi(v') = \frac{1}{t^2} \varphi(v - v_0) = - \frac{2}{t^2} \varphi(v, v_0) = - \frac{2}{t^2} \sum \alpha_i \varphi(v, u_i) = 0$$

Man nehme $u_1, \dots, u_r, v'$ mit Grad $v' = n-1 < n$

a2) $\varphi(v_0) \neq 0$:

Setze $v'' := v' + \frac{t}{\varphi(v_0)} \varphi(v') v_0$, dann gilt wie im Satz 7

schon bewiesen: $\varphi(v'') = 0$, Grad $v'' \leq n-1$

Wir brauchen in diesem Falle nur noch zu zeigen, daß $u_1, \dots, u_r, v''$ l.unabhängig sind.

$$\begin{aligned} \text{Zunächst gilt } v'' &= v' + \frac{t}{\varphi(v_0)} \varphi(v') v_0 \\ &= \frac{v-v_0}{t} + \frac{t}{\varphi(v_0)} \varphi\left(\frac{v-v_0}{t}\right) v_0 \\ &= \frac{1}{t} (v-v_0) + \frac{1}{t} \left(- \frac{2 \varphi(v, v_0)}{\varphi(v_0)} + 1 \right) v_0 \\ &= \frac{1}{t} \left(v - \frac{2 \varphi(v, v_0)}{\varphi(v_0)} v_0 \right) \end{aligned}$$

Angenommen es gelte $v'' = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$ mit $\alpha_i \in k[t]$, so würde folgen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi(v_0, u_i) = \varphi(v_0, v'') \\ &= \frac{1}{t} \left[\varphi(v_0, v) - \frac{2 \varphi(v, v_0)}{\varphi(v_0)} \varphi(v_0) \right] \\ &= - \frac{1}{t} \varphi(v, v_0) \Rightarrow \varphi(v, v_0) = 0 \end{aligned}$$

und damit wäre $v'' = \frac{1}{t} v$, also wäre v eine l.Kombination von $u_1, \dots, u_r$. Widerspruch.

b) $\varphi(v_0, u_j) \neq 0$ für mindestens ein j mit $1 \leq j \leq r$

In diesem Falle sind $u_1, u_2, \dots, u_r, v_0$ l.unabhängig, denn aus $v_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$ würde folgen $\varphi(v_0, u_j) = 0$

Betrachte die Vektoren $w = \xi_0 v_0 + \sum_{i=1}^r \xi_i u_i$ mit $\xi_i \in k$, $i = 0, \dots, r$, die der linearen Gleichung

$$\xi_0 \varphi(v_0) + 2 \sum_{i=1}^r \xi_i \varphi(v_0, u_i) = 0 \quad (3)$$

genügen. Sie bilden einen totalisotropen Unterraum der Dimension r , denn für zwei Lösungen

$$\begin{aligned} \xi_0 v_0 + \sum \xi_i u_i, \eta_0 v_0 + \sum \eta_i u_i \text{ gilt:} \\ \varphi(\xi_0 v_0 + \sum \xi_i u_i, \eta_0 v_0 + \sum \eta_i u_i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi_0 \eta_0 \varphi(v_0) + \eta_0 \sum \xi_i \varphi(v_0, u_i) + \xi_0 \sum \eta_i \varphi(v_0, u_i) \\
 &= \frac{1}{2} \eta_0 (\xi_0 \varphi(v_0) + 2 \sum \xi_i \varphi(v_0, u_i)) + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \xi_0 (\eta_0 \varphi(v_0) + 2 \sum \eta_i \varphi(v_0, u_i)) = 0
 \end{aligned}$$

Sei nun $w_1, \dots, w_r$ eine Basis dieses Unterraums mit

$$w_1 = \xi_{10} v_0 + \sum_i \xi_{1i} u_i, \quad 1 = 1, \dots, r, \quad \xi_{1i} \in k$$

und sei außerdem $\lambda \in k(t)$ so gewählt, daß für den Vektor

$$v'' := v' + \lambda u_j \quad \text{gilt}$$

$$\varphi(v'') = \varphi(v' + \lambda u_j) = \varphi(v') + 2 \lambda \varphi(v', u_j) = 0 \quad (4)$$

(λ kann man aus dieser Gleichung bestimmen, da $\varphi(v', u_j) \neq 0$ wegen $\varphi(v_0, u_j) \neq 0$)

Wir zeigen: 1. $\lambda \in k[t]$ und $\text{Grad } v'' \leq n-1$

2. $w_1, \dots, w_r, v''$ sind linear unabhängig

3. $\varphi / \langle w_1, \dots, w_r, v'' \rangle \equiv 0$

Zu 1.: Aus $0 = \varphi(v, u_j) = \varphi(v_0 + tv', u_j)$
 $= (\varphi_0 + t \varphi_1)(v_0 + tv_1 + \dots + t^n v_n, u_j)$

folgt $\varphi_0(v_0, u_j) = 0$ und außerdem

$$\begin{aligned}
 \varphi(v', u_j) &= - \frac{1}{t} \varphi(v_0, u_j) \\
 &= - \frac{1}{t} (\varphi_0(v_0, u_j) + t \varphi_1(v_0, u_j)) \\
 &= - \varphi_1(v_0, u_j) \in k
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2 \varphi_1(v_0, u_j)} \varphi(v') \in k[t]$$

Weiter gilt

$$\varphi(v') = \frac{1}{t^2} \varphi(v - v_0) = \frac{1}{t^2} (-2 \varphi(v, v_0) + \varphi(v_0))$$

ein Polynom vom $\text{Grad} \leq n-1$

Zu 2.: Angenommen es gelte $v'' = \sum_1 \alpha_1 w_1$ mit $\alpha_1 \in k[t]$,
 so würde gelten

$$\frac{1}{t} v - \frac{1}{t} v_0 + \lambda u_j = (\sum_1 \alpha_1 \xi_{10}) v_0 + \sum_{1,i} \alpha_1 \xi_{1i} u_i$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{t} \varphi(v_o, u_j) = (\sum_1 \alpha_1 \xi_{1o}) \varphi(v_o, u_j)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{t} = \sum_1 \alpha_1 \xi_{1o}$$

Widerspruch, da $\alpha_1 \in k[t]$ und $\xi_{1o} \in k$ sind.

Zu 3. genügt es zu zeigen: $\varphi(w_1, v'') = 0$ für $l=1, \dots, r$

$$\varphi(w_1, v'') = \varphi(\xi_{1o} v_o + \sum_i \xi_{1i} u_i, v' + \lambda u_j)$$

$$= \xi_{1o} \varphi(v_o, v') + \xi_{1o} \lambda \varphi(v_o, u_j) + \sum_i \xi_{1i} \varphi(v', u_i)$$

$$= \xi_{1o} \varphi(v_o, v') - t \xi_{1o} \lambda \varphi(v', u_j) - \frac{1}{t} \sum_i \xi_{1i} \varphi(v_o, u_i),$$

da $\varphi(v, u_i) = \varphi(v_o + tv', u_i) = 0$ gilt für $i=1, \dots, r$

Aus (3), (4) folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi(w_1, v'') &= \xi_{1o} \varphi(v_o, v') + \frac{1}{2} t \xi_{1o} \varphi(v') + \frac{1}{2t} \xi_{1o} \varphi(v_o) \\ &= \frac{1}{2t} \xi_{1o} \varphi(v_o + tv') = \frac{1}{2t} \xi_{1o} \varphi(v) = 0 \end{aligned}$$

III. GANZHEITSRINGE IN FUNKTIONENKÖRPERN

§ 1 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt werden wir die Bezeichnungen und Ergebnisse von O'Meara [12] (Chapter II) benutzen.

Sei K ein Körper; R ein Dedekind-Bereich in K , d.h.

$$R = \mathcal{O}(M) = \bigcap_{\mathfrak{M} \in M} \mathcal{O}(\mathfrak{M})$$

wobei M eine Dedekind-Menge von Primstellen über K ist. R ist dann echt in K enthalten und K ist der Quotientenkörper von R .

R wird als der Ring der ganzen Zahlen in K bezeichnet.

Ein Ideal in R ist genau dann prim, wenn es von der Gestalt $R \cap \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ ist, für ein $\mathfrak{M} \in M$. Wir werden dieses Ideal kurz mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen.

Für die Ideale in R gilt nach [12] (22:7) der Satz von der eindeutigen Primfaktor-Zerlegung; kurz R ist ein EPZI-Ring.

Betrachte nun eine quadratische Körpererweiterung L/K . S sei der Ring der ganzen Zahlen in L , d.h. $\alpha \in S$ genau dann, wenn α einer Gleichung

$$x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0 \quad \text{mit } a_i \in R \text{ genügt. } S \text{ ist dann}$$

ein Dedekind-Bereich in L .

Für ein Primideal $\mathfrak{M}$ in R gilt:

entweder $\mathfrak{M}$ bleibt prim in S

oder $\mathfrak{M}$ zerfällt in S in zwei Primfaktoren $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \mathfrak{P}'$

wobei $\mathfrak{P}'$ das zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Ideal in S ist.

Wir setzen noch voraus, daß jedes Element in R eindeutig in Primelemente zerlegbar ist; kurz: R sei ein EPZ-Ring. Damit ist R auch ein Hauptidealring, denn es gilt:

Ein Dedekindring R ist genau dann ein EPZ-Ring, wenn R ein Hauptidealring ist.

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ in R ist dann und nur dann prim, wenn es von einem Primelement p erzeugt wird $\mathfrak{p} = (p)$. p ist dann auch ein Primelement an der Stelle $\mathfrak{p}$.

Unter dieser Voraussetzung gilt außerdem für ein Primideal $\mathfrak{p} \in R$

entweder p bleibt prim in S
oder p zerfällt in S in zwei konjugierte
Primfaktoren $p = \varepsilon \pi \pi'$ mit Einheit ε

Behauptung: S ist genau dann ein EPZ-Ring, wenn gilt:

bleibt das Primelement $p \in R$ prim in S , so bleibt auch
das von p erzeugte Primideal (p) prim in S . (*)

Beweis: a) Es gelte (*)

Wir zeigen, daß S ein Hauptidealring und damit ein EPZ-Ring ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in S ein Hauptideal ist.

Das Ideal $\mathfrak{p}$ sei also prim in S . Es gibt dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ in R so daß gilt $\mathfrak{p} / \mathfrak{p} = (p)$ mit p prim in R

1. p bleibt prim in S : nach (*) ist (p) prim in S und es folgt $\mathfrak{p} = (p)$, da S ein EPZI-Ring ist

2. p zerfällt in S in zwei Primfaktoren $p = \varepsilon \pi \pi'$:

in diesem Falle haben wir $(p) = (\pi) (\pi')$. Also zerfällt in S das Primideal (p) in zwei Primfaktoren (π) , (π') .

Daraus folgt

$\mathfrak{p} = (\pi)$ bzw. (π') , da S ein EPZI-Ring ist.

b) Sei S ein EPZ-Ring

In S erzeugt dann jedes Primelement ein Primideal und damit gilt (*)

§ 2 Anwendungen

1. Sei $K = \mathbb{R}(t)$, $R = \mathbb{R}[t]$, so gelten alle Voraussetzungen von § 1

Die Primelemente sind bis auf Einheiten von der Gestalt

$$p = t + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

oder

$$p = t^2 + 2bt + c; \quad b, c \in \mathbb{R}; \quad b^2 < c$$

Die Menge der Einheiten ist $E = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sei $L = K(w)$; $w = \sqrt{-f}$; $f = 1+t^2$. Es ist dann

leicht folgendes nachzuweisen:

$$S = R[w] = \mathbb{R}[t, w]$$

Die Primelemente der Gestalt $t + a$ bleiben prim in S

Die Primelemente der Gestalt $t^2 + 2bt + c$ zerfallen in zwei Primfaktoren

$$p = t^2 + 2bt + c = (\alpha t + \beta + \gamma w)(\alpha t + \beta - \gamma w); \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[-(c-1) + \sqrt{(c-1)^2 + 4b^2} \right]$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left[(c-1) + \sqrt{(c-1)^2 + 4b^2} \right]$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \left[(c+1) - \sqrt{(c-1)^2 + 4b^2} \right]$$

Die Menge der Einheiten in S ist E

Behauptung: S ist ein EPZ-Ring⁽¹⁾

Beweis: Wir zeigen, daß (*) gilt:

Bleibt $p \in R$ prim in S , so ist p von der Gestalt $p = t + a$. Das Ideal $\mathfrak{p} = (p)$ zerlegt in S genau dann, wenn das Polynom $x^2 + f$ über $K_{\mathfrak{p}}$ zerlegt.

Dies ist der Fall genau dann, wenn $-f$ ein Quadrat in $K_{\mathfrak{p}}$ ist, was genau dann gilt, wenn $-\bar{f}$ ein Quadrat in $\bar{K}_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{R}$ ist.

Da $-\bar{f} = -(1+a^2)$ kein Quadrat in $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ ist, bleibt das Ideal $\mathfrak{p} = (p)$ prim in S . Damit gilt (*).

(1) Dieses Ergebnis steht als (Example 4.1) in der Arbeit von Cunnea [5]

Daß S nicht Euklidisch ist, kann man nach Armitage [1] (siehe auch Smith [18]) leicht zeigen.

2. Sei $K = \mathbb{C}(t)$, $R = \mathbb{C}[t]$

Die Primelemente in R sind bis auf Einheiten alle von der Gestalt $p = t + a$ mit $a \in \mathbb{C}$. Die Menge der Einheiten in R ist $E = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Sei $L = K(w)$ mit $w = \sqrt{-f}$; $f = 1+t^2$

Auch in diesem Falle gilt $S = R[w] = \mathbb{C}[t, w]$

Jedes Primelement $p \in R$ zerfällt in S in zwei Primfaktoren

$$p = t + a = (\alpha t + \beta + \gamma w)(\alpha t + \beta - \gamma w); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$\text{mit } \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + 1} \right), \quad \gamma = i\alpha$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 1} \right)$$

Damit ist S ein EPZ-Ring⁽¹⁾, da (*) nun eine leere Aussage ist.

Gruppe der Einheiten G in S :

Behauptung: $\varepsilon \in G \iff \varepsilon = e \varepsilon_0^n$
mit $e \in E = \mathbb{C}^\times$, $\varepsilon_0 = it + w$, $n \in \mathbb{Z}$

Beweis: Sei $\varepsilon \in G \Rightarrow N_{L/K}(\varepsilon) = N(\varepsilon) \in E = \mathbb{C}^\times$

Wähle $e \in E$ mit $N(e) = e^2 = N(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = e \varepsilon_1$
mit $\varepsilon_1 \in G$, $N(\varepsilon_1) = 1$

Wir betrachten nun die Lösungen $\varepsilon = g + wh \in G$ der Gleichung

$$N(\varepsilon) = g^2 + f h^2 = 1 \quad (1)$$

mit $g, h \in R = \mathbb{C}[t]$

Setze $\text{Gr } \varepsilon := \text{Gr } g$

- 1) Für $\text{Gr } \varepsilon = \text{Gr } g = 0$ folgt aus (1) $h = 0 \Rightarrow \varepsilon = g = \pm 1$
- 2) Sei $\text{Gr } \varepsilon = \text{Gr } g = n \geq 1$: Aus (1) folgt $\text{Gr } h = n-1$

(1) Dieses Ergebnis folgt aus (Theorem 4.5) in der Arbeit von Cunnea [5]. Nach Armitage [1] (siehe auch Smith [18]) kann man sogar zeigen, daß S Euklidisch ist.

Schreibe $g = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$

$$h = b_{n-1} t^{n-1} + b_{n-2} t^{n-2} + \dots + b_0 \text{ mit } a_i, b_i \in \mathbb{C}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt aus (1) weiter

$$a_n^2 + b_{n-1}^2 = 0, \quad 2(a_n a_{n-1} + b_{n-1} b_{n-2}) = 0$$

Daraus folgt:

entweder a) $a_n = i b_{n-1}, \quad a_{n-1} = i b_{n-2}$

oder b) $a_n = -i b_{n-1}, \quad a_{n-1} = -i b_{n-2}$

Im Falle a) setze:

$$\varepsilon_1 = g_1 + wh_1 = (it-w)(g + wh) \text{ d.h. } \varepsilon_1 = \varepsilon_0^{-1} \varepsilon$$

$$\Rightarrow g_1 = it g + (1+t^2) h, \quad h_1 = it h - g$$

$$\Rightarrow g_1, h_1 \in \mathbb{C}[t] \text{ und } \text{Gr } g_1 < n$$

$$\text{Außerdem gilt } N(\varepsilon_1) = N(\varepsilon_0^{-1}) N(\varepsilon) = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \text{ wobei } \varepsilon_1 \text{ eine Lösung von (1) ist}$$

$$\text{mit } \text{Gr } \varepsilon_1 < n = \text{Gr } \varepsilon$$

Im Falle b) setze:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon. \text{ Wie im Falle a) folgt}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_1 \text{ wobei } \varepsilon_1 \text{ eine Lösung von (1) ist}$$

vom Grad $< n$

Durch Induktion nach $n = \text{Gr } \varepsilon$ folgt

$$\varepsilon = \varepsilon_0^1 \varepsilon_1 \text{ wobei } \varepsilon_1 \text{ eine Lösung von (1) ist}$$

$$\text{mit } \text{Gr } \varepsilon_1 = 0, \quad 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varepsilon = \pm \varepsilon_0^1$$

Die Umkehrung ist trivial

3. Sei $K = \mathbb{R}(t, w)$; $w = \sqrt{-f}$; $f = 1+t^2$,

$R = \mathbb{R}[t, w]$ der Ring der ganzen Zahlen in K .

Da schon gezeigt wurde, daß R ein EPZ-Ring ist, sind hier auch alle Voraussetzungen von § 1 erfüllt.

Die Menge der Einheiten in R ist $E = \mathbb{R}^\times$ und die Prim-elemente haben bis auf Einheiten alle die Gestalt

$$p = a t + b + c w \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}; a^2 + c^2 \neq 0$$

Zunächst definieren wir für ein Element $z = g + wh \in R$ mit $g, h \in \mathbb{R}[t]$:

$\text{Grad } z = \text{Gr } z := \frac{1}{2} \text{Gr } N(z) = \frac{1}{2} \text{Gr } (g^2 + f h^2)$,
wobei $\text{Gr } N(z)$ der gewöhnliche Grad eines Polynoms ist
und $\text{Gr } 0 := -\infty$

Es folgt sofort $\text{Gr } z = \max(\text{Gr } g, \text{Gr } h + 1) \in \mathbb{N}$
für $z \neq 0$

Aus der Definition folgt weiter:

$$\text{Gr } (z_1 z_2) = \text{Gr } z_1 + \text{Gr } z_2 \quad (2)$$

Wir zeigen außerdem:

$$\text{Gr } (z_1 + z_2) \leq \max(\text{Gr } z_1, \text{Gr } z_2) \quad (3)$$

wobei $<$ nur möglich ist, wenn gilt $\text{Gr } z_1 = \text{Gr } z_2$

Beweis: mit $z_1 = g_1 + wh_1$, $z_2 = g_2 + wh_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Gr } (z_1 + z_2) &= \text{Gr } ((g_1 + g_2) + w(h_1 + h_2)) \\ &= \max(\text{Gr } (g_1 + g_2), \text{Gr } (h_1 + h_2) + 1) \\ &\leq \max(\max(\text{Gr } g_1, \text{Gr } g_2), \max(\text{Gr } h_1 + 1, \text{Gr } h_2 + 1)) \\ &= \max(\max(\text{Gr } g_1, \text{Gr } h_1 + 1), \max(\text{Gr } g_2, \text{Gr } h_2 + 1)) \\ &= \max(\text{Gr } z_1, \text{Gr } z_2) \end{aligned}$$

wobei $<$ nur in den folgenden drei Fällen auftreten kann:

- 1) $\text{Gr } g_1 = \text{Gr } g_2$ und $\text{Gr } h_1 = \text{Gr } h_2 \quad \Rightarrow \text{Gr } z_1 = \text{Gr } z_2$
- 2) $\text{Gr } h_1 + 1 = \text{Gr } h_2 + 1 > \max(\text{Gr } g_1, \text{Gr } g_2) \quad \Rightarrow \text{Gr } z_1 = \text{Gr } z_2$
- 3) $\text{Gr } g_1 = \text{Gr } g_2 > \max(\text{Gr } h_1 + 1, \text{Gr } h_2 + 1) \quad \Rightarrow \text{Gr } z_1 = \text{Gr } z_2$

und damit ist (2) bewiesen.

Wir wenden uns nun der Frage zu: gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{R}$ so, daß der Ring der ganzen Zahlen S in $L = K(\sqrt{-p})$ ein EPZ-Ring ist?

Eine Primzahl $q \in R$; $q = at + b + cw$ mit $a, b, c \in R$;
 $a^2 + c^2 \neq 0$ zerlegt in S genau dann, wenn die Gleichung
 $\pm q = z_1^2 + pz_2^2$ in R lösbar ist.

Es gilt mit Hilfe von (2) und (3) :

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Gr}(\pm q) = \max(2n_1, 2n_2 + 1) \text{ mit } n_i = \text{Gr}(z_i); i=1,2 \\ &\Rightarrow n_1 \leq 0, n_2 = 0 \\ &\Rightarrow z_1, z_2 \in R, z_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also, in S zerlegen nur die Primelemente $q \in R$ von der
 Gestalt $q = \pm(g^2 + ph^2)$ mit $g, h \in R, h \neq 0$
 Primelemente $q \in R$ von der Gestalt $q = -g^2 + ph^2$
 mit $g, h \in R; g, h \neq 0$
 bleiben prim in S .

Da $K_{\mathcal{M}} \cong \mathbb{C}$ für alle Primstellen $\mathcal{M}$ ($\bar{K}_{\mathcal{M}}$ ist eine nicht reelle
 algebraische Erweiterung von R), zerlegt das Polynom
 $x^2 + p$ über $K_{\mathcal{M}}$, also zerlegt auch das Ideal
 $\mathcal{M} = (q)$ in S .

Damit gilt (*) nicht, d.h. S kann kein EPZ-Ring sein.

Ergebnis: Der Ring der ganzen Zahlen S in $L = K(\sqrt{-p})$ ist
 kein EPZ-Ring für alle Primelemente p in R .

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen zeigen:
 Betrachte ein Primelement $q \in R$ der Gestalt

$$q = -g^2 + ph^2 \quad \text{mit } g, h \in R; g, h \neq 0$$

Da jede quadratische Form der Dimension 3 über K isotrop
 ist [15], gibt es eine n.t. Lösung der Gleichung

$$qz^2 = x^2 + py^2 \quad \text{mit } x, y, z \in R$$

O.E. kann man x, y, z teilerfremd in R wählen.

Angenommen S wäre ein EPZ-Ring, so müßte $x + \sqrt{-p}y$
 eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primelementen
 in S haben; etwa $x + \sqrt{-p}y = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow qz^2 &= N_{L/K}(x + \sqrt{-p}y) = N(\pi_1) N(\pi_2) \dots N(\pi_r) \\ &= (\pi_1 \pi_1') (\pi_2 \pi_2') \dots (\pi_r \pi_r') \end{aligned}$$

Da q in S prim ist und da S nach der Annahme ein EPZ-Ring ist, muß für ein i , etwa $i = 1$, gelten

$$\begin{aligned} \pi_1 \sim q \text{ oder } \pi_1' \sim q &\Rightarrow \pi_1 \text{ und } \pi_1' \sim q \\ \Rightarrow q / z \text{ und } q / x \pm \sqrt{-p} y \\ \Rightarrow q / 2x &\Rightarrow q/x \text{ da } 2 \text{ Einheit in } R \text{ ist} \\ \Rightarrow q^2 / py^2 &\Rightarrow q/y \end{aligned}$$

Widerspruch, da x, y, z teilerfremd in R sind.

IV. DIE u-INVARIANTE

§ 1 Allgemeine Ergebnisse

Für einen Körper K wird die Invariante $u = u(K)$ als die maximale Dimension einer anisotropen quadratischen Form über K definiert. Kaplansky [6] vermutete, daß u , falls endlich, immer eine Zweierpotenz sein muß und zeigte, daß es Körper gibt, wo u eine beliebig vorgegebene Zweierpotenz ist.

Lemma: Ist die Form φ über dem Körper k anisotrop, so ist die Form

$$\psi = \langle 1, t \rangle \otimes \varphi \text{ über } K = k(t) \text{ anisotrop}$$

Beweis: An der Primstelle $\mathcal{P}$ über K mit dem Primelement $p = t$ gilt:

$$\psi_{\mathcal{P}}^1 = \psi_{\mathcal{P}}^2 = \varphi \text{ anisotrop über } \bar{K}_{\mathcal{P}} = k$$

Aus dem Satz von Springer folgt, daß ψ anisotrop über $K_{\mathcal{P}}$ ist und damit auch über K .

Ist nun K_n ein rationaler Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n über $\mathbb{C}$; $K_n = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, so ist $u(K_n) = 2^n$ denn:

- 1) Jede quadratische Form über K_n in $> 2^n$ Variablen ist isotrop (Lang [8])
- 2) Die Form $\varphi_n = \bigotimes_{i=1}^n \langle 1, x_i \rangle$ ist über K_n anisotrop.

Dies folgt aus dem Lemma durch Induktion.

Auf der anderen Seite weiß man nur, daß u die Werte 3, 5, 7 nicht annehmen kann (siehe Lorenz [10])

In der Hoffnung, eine weitere Information über u zu gewinnen, befaßte ich mich mit der Untersuchung von nicht reellen Funktionenkörpern über einen reell-abgeschlossenen Grundkörper.

Zunächst haben wir den

Satz 1: Für den Funktionenkörper $K = k(t)$ über dem Grundkörper k gilt:

$$u(K) \geq 2 \max_{[L:k] < \infty} u(L)$$

Beweis: 1) Ist $[L:k] < \infty$ und L/k separabel so gilt $L = k(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ einer Gleichung $p(t) = 0$ genügt mit $p(t)$ prim aus $k[t]$

An der Primstelle $\mathcal{A}$ über K mit dem Primelement $p(t)$ gilt also

$$\bar{K}_{\mathcal{A}} \cong L$$

Sei nun φ eine quadratische Form über $K_{\mathcal{A}}$ der Dimension $> \frac{1}{2} u(K)$ und wähle die Form $\mathcal{N}$ über K mit $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^1 = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}^2 = \varphi$

Es gilt dann $\dim \mathcal{N} = 2 \dim \varphi > u(K)$.

Daraus folgt, daß $\mathcal{N}$ in K isotrop ist und damit auch in $K_{\mathcal{A}}$. Aus dem Satz von Springer folgt: $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^1$ oder $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^2$ ist in $K_{\mathcal{A}}$ isotrop, d.h. φ ist in $K_{\mathcal{A}}$ isotrop

$$\Rightarrow u(L) = u(K_{\mathcal{A}}) \leq \frac{1}{2} u(K)$$

2) Ist L/k beliebig mit $[L:k] < \infty$ und ist $L_s \subset L$ die separable Hülle von k in L , so ist L/L_s rein inseparabel von p -Potenz-Grad mit $p = \text{char } K \neq 2$. Für $\alpha \in L$ gibt es dann ein $e \geq 0$ mit $\alpha^p = a \in L_s \Rightarrow \langle \alpha \rangle \cong \langle a \rangle$
Daraus ergibt sich leicht:

$$u(L) \leq u(L_s) \quad \text{und nach 1)} \quad u(L) \leq \frac{1}{2} u(K)$$

Im weiteren werden wir einen Satz von J.W.S. Cassels gebrauchen.

Satz 2: t sei eine Unbestimmte über k , φ eine beliebige quadratische Form über k . Wird $f(t) \in k[t]$ im Körper $k(t)$ durch φ dargestellt, so wird es schon im Polynomring $k[t]$ durch φ dargestellt.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines von Cassels stammenden Satzes. Für den Beweis siehe Pfister [13].

Eine weitere Verallgemeinerung von Satz 2 ist:

Satz 3: t sei eine Unbestimmte über k . Wird $f(t) \in k[t]$ im Körper $k(t)$ durch die anisotrope quadratische Form

$$\varphi = \sum (a_{ij} + tb_{ij}) x_i x_j \text{ mit } a_{ij}, b_{ij} \in k$$

dargestellt, so wird es schon im Polynomring $k[t]$ durch φ dargestellt.

Hier muß man allerdings voraussetzen, daß φ anisotrop ist. Der Beweis erfolgt dann analog zum Beweis von [13]

Falls φ isotrop ist, gilt Satz 3 nicht mehr, denn das Polynom t wird z.B. durch die Form $\varphi = (1+t)x_1x_2$ in $k[t]$ nicht dargestellt.

§ 2 Nicht reelle Funktionenkörper K über R

Für $\text{tr}(K/R) = 1$ wissen wir (Pfister [15]) daß $u(K) \leq 2$. Also ist u eine Zweierpotenz.

Für $\text{tr}(K/R) = n > 1$ gilt nach Lorenz [10] (12.11)

$$u(K) \leq \frac{1}{2} (4^n - 2^n)$$

Nach einer Vermutung von Lang sollte sogar gelten

$$u(K) \leq 2^n$$

Dies ist die Einschränkung, im Bezug auf quadratische Formen, seiner allgemeineren Vermutung, die lautet:

Jeder nicht reelle Funktionenkörper in n Variablen über R ist ein C_n Körper. (Lang [9])

Wir betrachten nun den Fall $n = 2$

In diesem Fall gilt nach Lorenz [10] $u(K) \leq 6$

Außerdem gilt $u \neq 3$, $u \neq 5$ (Lorenz [10] (8.9))

Sollte die Vermutung von Lang gelten, so müßte u auch in diesem Fall eine Zweierpotenz 1, 2 oder 4 sein.

Jedoch hatte ich die Hoffnung, einen solchen Körper konstruieren zu können, wobei $u > 4$ und damit $u = 6$ gilt.

Zunächst bringe ich hier einige Beispiele, wobei $u(K) \geq 4$ gilt.

Beispiel 1: Sei $k = R(t, w)$ mit $w = \sqrt{-(1+t^2)}$; $K = k(y)$

Die Form $\langle 1, 1 \rangle$ ist anisotrop über k , denn sonst hätte man eine Darstellung für -1 als Quadrat in k

$$\begin{aligned} -1 &= (\xi + w\eta)^2 & \text{mit } \xi, \eta \in R(t) \\ \Rightarrow -1 &= \xi^2 - (1+t^2)\eta^2, & 0 = \xi\eta \end{aligned}$$

Ist $\eta = 0$, so wäre -1 ein Quadrat in $R(t)$. Widerspruch.

Ist $\eta \neq 0 \Rightarrow \xi = 0$ und damit wäre $1+t^2$ ein Quadrat in $R(t)$. Was nicht der Fall ist.

Nun folgt aus dem Lemma von IV § 1, daß die Form $\langle 1,1 \rangle \otimes \langle 1,y \rangle$ über K anisotrop ist.

Beispiel 2: Sei $K = \mathbb{R}(x,y,w)$ mit $w = \sqrt{-f}$, wobei f eine positiv semidefinite bzw. positiv definite Funktion in $\mathbb{R}(x,y)$ ist, die nicht als Summe von 3 Quadraten aus $\mathbb{R}(x,y)$ darstellbar ist.

Beispiele für solche Funktionen wurden in I § 6 erwähnt. Die Form $\varphi = \langle 1,1,1,1 \rangle$ ist in K anisotrop, denn sonst hätte man eine nicht triviale Darstellung für die Null.

$$\varphi(u + wv) = 0,$$

dabei sind u,v Vektoren mit Komponenten aus $\mathbb{R}(x,y)$

$$\Rightarrow \varphi(u) - f \varphi(v) = 0, \quad \varphi(u,v) = 0$$

Aus $\varphi(v) = 0$ folgt dann $\varphi(u) = 0$ und damit wäre über $\mathbb{R}(x,y)$ isotrop.

Also $\varphi(v) \neq 0$, und man hätte die Darstellung:

$$f = \left(\frac{1}{\varphi(v)} \right)^2 \varphi(u) \varphi(v) = \text{Summe von 3 Quadraten}$$

in $\mathbb{R}(x,y)$, da $\varphi(u,v) = 0$

Dies folgt aus dem Satz 3.3 (Lorenz [10]) bzw. Satz 1 (Pfister [15]).

Beispiel 3: K wie in Bsp. 2 mit $f = 1 + x^2 + y^2$

Die Form $\varphi = \langle 1,x \rangle \otimes \langle 1,y \rangle$ ist in K anisotrop, sonst hätte man wie in Bsp. 2 eine Darstellung für f durch die Form

$\langle x, y, xy \rangle$ über $\mathbb{R}(x,y)$ und damit nach Satz 3 über $\mathbb{R}(x) [y]$:

$$1+x^2+y^2 = x u_1^2 + y (u_2^2 + x u_3^2) \text{ mit } u_i \in \mathbb{R}(x) [y]$$

Da die Form $\langle 1,x \rangle$ über $\mathbb{R}(x)$ anisotrop ist, ergibt ein Vergleich der Koeffizienten auf beiden Seiten.

$$1+x^2+y^2 = x (\xi_1 + y \eta_1)^2 + y (\xi_2^2 + x \xi_3^2)$$

mit $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}(x)$

Ein weiterer Koeffizientenvergleich ergibt

$$1 = x \eta_1^2 \quad \text{Widerspruch}$$

In den nächsten zwei Paragraphen werden dann zwei Versuche beschrieben, wodurch ich hoffte, den genauen Wert der Invariante u eines solchen Körpers ermitteln zu können.

§ 3 Eine Folgerung aus der Sequenz von Milnor

Sei $k = \mathbb{R}(t, w)$ mit $w = \sqrt{-(1+t^2)}$; $K = k(y)$

In I Satz 2 wurde gezeigt, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(K) \xrightarrow[\mathcal{N} \neq \infty]{\varphi^2} \bigoplus W(K_{\mathcal{N}}) \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Für alle $\mathcal{N}$ gilt: $u(K_{\mathcal{N}}) \leq 2$ (genauer = 2), da $K_{\mathcal{N}}$ endlich algebraisch über k und damit ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$ ist.

Sei nun φ eine beliebige quadratische Form über K , es gilt dann: $\dim \text{Ker}(\varphi^2) \leq 2$

Man hatte die Hoffnung, eine Form $\mathcal{N}$ über K konstruieren zu können, so daß gilt

$$\dim \mathcal{N} \leq 2 \text{ und } \mathcal{N}_{\mathcal{N}}^2 \sim \varphi_{\mathcal{N}}^2 \text{ für alle } \mathcal{N}$$

Daraus würde folgen $(\varphi \ominus \mathcal{N})_{\mathcal{N}} \sim 0$ für alle $\mathcal{N}$

und aus der exakten Sequenz folgt $\varphi \ominus \mathcal{N} \sim \chi \in W(k)$, mit $\dim \chi \leq 2$, da $u(k) = 2$ gilt.

$$\Rightarrow \varphi \sim \mathcal{N} \oplus \chi \Rightarrow \dim \text{Ker}(\varphi) \leq 4$$

Damit wäre also bewiesen $u(K) = 4$

Daraus würde aber auch folgen, daß jede 3. dimensionale Form über K mindestens ein Element aus k darstellt.

Denn für eine 3-dimensionale Form φ über K gilt:

entweder ist φ isotrop und damit jedes Element aus k durch φ darstellbar oder φ ist anisotrop und man hätte

$$\text{Ker}(\varphi) = \varphi \cong \mathcal{N} \oplus \chi \text{ mit } \dim \mathcal{N} \leq 2, \chi \in W(k)$$

und damit stellt φ mindestens ein Element aus k dar.

Nach der Folgerung zu Satz 8 in Kapitel I gibt es aber 3-dimensionale Formen über K , die kein Element aus k darstellen.

Somit ist diese Hoffnung gescheitert.

§ 4 Das Beispiel von Birch und Swinnerton-Dyer

In II § 3 haben wir gezeigt, daß die Form $\varphi = \varphi_0 + t \varphi_1$ über $K = k(t)$ genau dann in K isotrop ist, wenn φ_0, φ_1 eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle haben.

Ist k ein nicht reeller Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{R}$, und wäre es möglich ein System von zwei quadratischen Formen in 5 Variablen über k zu finden, das keine simultane n.t. Nullstelle in k besitzt, so wäre damit bewiesen, daß $u(K) > 4$ und damit $u(K) = 6$ gilt.

Ein interessantes Beispiel für ein solches System über $\mathbb{Q}$ steht in der Arbeit von Birch und Swinnerton-Dyer [2] nämlich:

Behauptung: Das System $uv = x^2 - 5y^2$
 $(u+v)(u+2v) = x^2 - 5z^2$

hat in $\mathbb{Q}$, dem Körper der rationalen Zahlen, keine simultane n.t. Lösung, obwohl es lokal überall, d.h. in jedem p -adischen Körper $\mathbb{Q}_p$, eine n.t. Lösung besitzt.

Beweis: Da für $p \neq 2$ mindestens eine der Zahlen $-1, 5, -5$ ein p -adisches Quadrat ist, ist mindestens einer der Vektoren $(1, 1, 1, 0, \sqrt{-1})$; $(10, -10, 5, 5, \sqrt{5})$; $(5, 0, 0, 0, \sqrt{-5})$ eine Lösung des Systems in $\mathbb{Q}_p$

Für $p = 2$ haben wir die Lösung $(-25, 5, 0, 5, 2\sqrt{-15})$

Nun nehmen wir an: (u, v, x, y, z) sei eine Lösung in $\mathbb{Q}$. O.E. kann man u, v, x, y, z ganz rational wählen.

Aus $5/u$ folgt $5/x \geq 5/u+v$ oder $5/u+2v \geq 5/v$
 $\geq 5^2/5y$ und $5^2/5z \geq 5/y$ und $5/z$

Deshalb kann man annehmen $5 \nmid u, v$ bzw. $5 \nmid u+v, u+2v$

Schreibe $u = \xi u_1$ und $v = \xi v_1$ mit $\xi := (u, v)$; u_1, v_1 sind also teilerfremd. Wir haben dann:

$$\xi^2 u_1 v_1 = x^2 - 5y^2$$

$$\xi^2 (u_1 + v_1)(u_1 + 2v_1) = x^2 - 5z^2$$

Da S , der Ring der ganzen Zahlen im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, ein EPZ-Ring ist, läßt sich $x + \sqrt{5} y$ eindeutig in Primfaktoren zerlegen.

$$x + \sqrt{5} y = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r, \pi_i \text{ prim in } S$$

Sei nun q ein Primteiler von u_1 . Wir haben die zwei Möglichkeiten:

1) q zerlegt in S in zwei Primfaktoren $q = \pi \pi' \Rightarrow q = N(\pi)$

2) q bleibt prim in S :

Aus $q/\xi^2 u_1 v_1 = x^2 - 5y^2 = N(x + \sqrt{5}y) = (\pi_1 \pi_1') (\pi_2 \pi_2') \dots (\pi_r \pi_r')$ folgt $q \sim \pi_i$ oder π_i' für ein $i \Rightarrow q \sim \pi_i \sim \pi_i'$

Da u_1, v_1 teilerfremd sind, sieht man leicht, daß q nur in gerader Potenz in u_1 aufgehen kann.

Aus 1) und 2) folgt dann:

$$u_1 = N(x_1 + \sqrt{5} y_1) = x_1^2 - 5 y_1^2 \quad \text{mit } x_1 + \sqrt{5} y_1 \in S \\ \Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{x}_1^2 \quad \text{mit } \bar{x}_1 \neq 0 \text{ in } \bar{\mathbb{Q}}_5 = \mathbb{Z}/(5), \text{ da } 5 \nmid u_1 \text{ ist}$$

Genauso beweist man

$$\bar{v}_1 = \bar{x}_2^2, \quad \bar{u}_1 + \bar{v}_1 = \bar{\xi}_1^2 \quad \text{mit } \bar{x}_2, \bar{\xi}_1 \neq 0 \text{ in } \bar{\mathbb{Q}}_5$$

Daraus hat man einen Widerspruch, da die Gleichung

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = \bar{\xi}_1^2$$

keine Lösung in $\bar{\mathbb{Q}}_5$ hat, wobei alle Variablen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\xi}_1$ von Null verschieden sind.

Sei nun $k = \mathbb{R}(t, w)$ mit $w = \sqrt{-f}$, $f = 1+t^2$

Ein zu dem Beispiel von Birch und Swinnerton-Dyer ähnliches Beispiel über den Körper k anstelle von $\mathbb{Q}$ wäre das folgende:

$$u v = x^2 - p y^2 \quad (o) \\ (u+v)(u+2v) = x^2 - p z^2$$

mit einem Primelement $p \in \mathbb{R} = \mathbb{R}[t, w]$

Um auch ein analoges Ergebnis erwarten zu können, war es zunächst erforderlich, die Ringe der ganzen Zahlen S in den quadratischen Erweiterungen $k(\sqrt{p})$ mit p prim in R auf ihre Eigenschaft als EPZ-Ringe zu untersuchen. In III § 2 wurde gezeigt, daß keiner dieser Ringe ein EPZ-Ring ist.

Nimmt man trotzdem an, daß S in $k(\sqrt{p})$ für ein Prim-element p ein EPZ-Ring ist, so kann man wie oben zeigen:

$u_1 = \pm N(x_1 + \sqrt{p}y_1) = \pm (x_1^2 - p y_1^2)$ mit $x_1, y_1 \in R$
($\pm$ tritt auf, da -1 im Gegensatz zum obigen Beispiel hier keine Norm ist)

$\Rightarrow \bar{u}_1 = \pm \bar{x}_1^2$ mit $\bar{x}_1 \neq 0$ in $\bar{K}_y$, da $p \nmid u_1$ ist
(y die Primstelle über K mit dem Primelement p)

Weiter zeigt man

$\bar{v}_1 = \pm \bar{x}_2^2$, $\bar{u}_1 + \bar{v}_1 = \pm \bar{\xi}_1^2$, $\bar{u}_1 + 2\bar{v}_1 = \pm \bar{\xi}_2^2$
mit $\bar{x}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \neq 0$ in $\bar{K}_y$

Daraus, zusammen mit (o), folgt

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = \pm \bar{\xi}_1^2 \quad (1)$$

$$\text{und } \bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2 = \pm \bar{\xi}_2^2 \quad (2)$$

Aus (o) folgt weiter

$$\bar{\xi}_1^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 = \bar{\xi}_1^2 \bar{u}_1 \bar{v}_1 = \bar{x}_2^2$$

$$\text{und } \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 = \bar{\xi}_1^2 (\bar{u}_1 + \bar{v}_1) (\bar{u}_1 + 2\bar{v}_1) = \bar{x}_2^2$$

$$\text{Daraus folgt } \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \pm \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \quad (3)$$

Auch hier hat man noch keinen Widerspruch da $\bar{K}_y$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, und die drei Gleichungen (1), (2), (3) in den 4 Variablen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ haben dann eine Lösung, wobei alle Variablen von Null verschieden sind.

Literaturverzeichnis

1. Armitage, J.V.: On unique factorization in algebraic function fields. Illinois J. Math. 11, 280-283 (1967).
2. Birch, B.J. and H.P.F. Swinnerton-Dyer: The Hasse problem for rational surfaces. J. reine angew. Math. 274/275, 164-174 (1975).
3. Cassels, J.W.S., W.J. Ellison and A. Pfister: On sums of squares and on elliptic curves over function fields. J. of Number Theory 3, 125-149 (1971).
4. Christie, M.R.: Positive definite rational functions of two variables which are not the sum of three squares. Reprint, Cambridge, England (1973).
5. Cunnea, W.M.: Unique factorization in algebraic function fields. Illinois J. Math. 8, 425-438 (1964).
6. Kaplansky, I.: Quadratic forms. J. Math. Soc. Japan 5, 200-207 (1953).
7. Knight, J.T.: The Hasse-Principle in real algebraic function fields. Trinity College, Cambridge (1966).
8. Lang, S.: On quasi-algebraic closure. Ann. of Math. 55, 373-390 (1952).
9. Lang, S.: The theory of real places. Ann. of Math. 57, 378-391 (1953).
10. Lorenz, F.: Quadratische Formen über Körpern. Lecture Notes in Mathematics 130. Springer-Verlag, Berlin (1970).
11. Milnor, J.: Algebraic K. theory and quadratic forms. Invent. Math. 9, 318-344 (1970).
12. O'Meara, O.T.: Introduction to Quadratic Forms. Springer-Verlag, Berlin (1963).
13. Pfister, A.: Multiplikative quadratische Formen. Arch. Math. 16, 363-370 (1965).
14. Pfister, A.: Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Invent. Math. 1, 116-132 (1966).

15. Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. Math. 4, 229-237 (1967).
16. Pfister, A.: Sums of squares in the function field $\mathbb{R}(x,y)$. Computers in Number Theory. Academic Press, 77-81 (1971).
17. Scharlau, W.: Quadratic reciprocity laws. J. Number Theory 4, 78-97 (1972).
18. Smith, David J.: Euclidean subdomains of algebraic function fields. J. London Math. Soc(2) 6, 103-108 (1972).
19. Springer, T.A.: Quadratic forms over fields of discrete valuation. Indag. Math. 17, 352-362 (1955).
20. Lam, T.Y.: The algebraic Theory of Quadratic Forms. W.A. Benjamin, Inc. Reading Massachusetts (1973).

Lebenslauf

Am 12.10.44 wurde ich als Sohn des Röntgenfotografen Abdel- Hamid Amer und seiner Ehegattin Adlia (geb. Kabil) in Monof / Ägypten geboren.

Im Oktober 1948 kam ich zur Schule und nach zwölf Jahren erhielt ich das Abitur. Anschließend besuchte ich die Universität Kairo und studierte dort Mathematik. Im Mai 64 legte ich die Abschlußprüfung B. Sc. (Bachelor of Science) mit Erfolg ab und wurde danach als Assistent in der Mathematischen Abteilung der Naturwissenschaftlichen Fakultät an derselben Universität angestellt.

Nach fast dreijähriger Tätigkeit bekam ich ein Stipendium vom DAAD um in der Bundesrepublik Deutschland zu promovieren. Zu Beginn des WS 67/68 setzte ich mein Studium in Göttingen fort. Da mein B. Sc. nicht als Diplom anerkannt wurde, mußte ich die Diplomprüfung für Mathematiker nachholen, die ich im April 70 mit Erfolg ablegte.

Anfang des WS 70/71 setzte ich mein Studium an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz fort. Dort erhielt ich ein Doktorarbeitsthema von Herrn Professor Pfister. Da ich seit Ende 73 keine finanzielle Unterstützung mehr bekam, war ich darauf angewiesen, meinen Lebensunterhalt selbst zu finanzieren. Dies führte zur Verzögerung meiner Forschungstätigkeit. Meine Doktorarbeit liegt nun zur Beurteilung vor.

